第 3 节 诱导公式（★★）

内容提要

本节主要归纳诱导公式相关的应用，诱导公式有下面的六组：

①$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$，$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$，$\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha$，其中 $k\in\mathbf{Z}$.

②$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$，$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$，$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$.

③$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$，$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$，$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$.

④$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$，$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$.

⑤$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$，$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$.

⑥$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$，$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$.

诱导公式主要用于化掉 $\sin(\frac{k\pi}{2}\pm\alpha)$，$\cos(\frac{k\pi}{2}\pm\alpha)$，$\tan(\frac{k\pi}{2}\pm\alpha)$ 中的 $\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 这个部分，其口诀为“奇变偶不变，符号看象限”，此口诀有两点需注意：

①奇变偶不变指要化掉的若是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍，则函数名正弦变余弦，余弦变正弦；偶数倍则不变；

②符号看象限，是看原来的三角函数名在对应象限的符号，例如，对 $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ 化简时，符号看象限，看的是 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ 这个第二象限的角（其中 α 看成锐角）的余弦值的符号，显然为负，所以添负号，得到 $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$.

典型例题

类型Ⅰ：利用诱导公式化简求值

【例 1】$\sin 600^{\circ}=$_____.

解法 1：600°较大，可通过拆 90°的整数倍，并用诱导公式化掉，使角变小，便于计算，

$\sin 600^{\circ}=\sin(540^{\circ}+60^{\circ})$，

首先，“奇变偶不变”，540° 是 90° 的 6 倍，属偶数倍，所以“偶不变”，化去 540° 后函数名仍为“sin”；其次，“符号看象限”，将 60° 看成锐角，$540^{\circ}+$锐角在第三象限，正弦为负，所以添个负号，

故 $\sin 600^{\circ}=-\sin 60^{\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解法 2：也可在 600° 上先减 720°，再用 $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ 求值，

$\sin 600^{\circ}=\sin(600^{\circ}-720^{\circ})=\sin(-120^{\circ})=-\sin 120^{\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

答案：$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【反思】若三角代数式中的角可拆分出 90° 的整数倍，则可用诱导公式将这部分化掉.

【变式 1】设 $\cos 29^{\circ}=m$，则 $\sin 241^{\circ}\tan 151^{\circ}=$（　　）

（A）$\sqrt{1+m^2}$　　（B）$\sqrt{1-m^2}$　　（C）$-\sqrt{1+m^2}$　　（D）$-\sqrt{1-m^2}$

解析： 已知的是 $\cos 29^{\circ}$，所以把 241° 和 151° 用诱导公式向 29° 转化，$241^{\circ}=270^{\circ}-29^{\circ}$，$151^{\circ}=180^{\circ}-29^{\circ}$，

$\sin 241^{\circ}\tan 151^{\circ}=\sin(270^{\circ}-29^{\circ})\tan(180^{\circ}-29^{\circ})=-\cos 29^{\circ}(-\tan 29^{\circ})=\sin 29^{\circ}=\sqrt{1-\cos^2 29^{\circ}}=\sqrt{1-m^2}$.

答案： B

【变式 2】已知 $f(x)=\dfrac{\sin(2\pi-x)\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}{\cos(3\pi-x)\sin(\frac{11\pi}{2}-x)}$，则 $f(-\dfrac{21\pi}{4})=$______.

解析： 所给解析式中 2π，$\dfrac{3\pi}{2}$，3π，$\dfrac{11\pi}{2}$ 均为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的整数倍，可用诱导公式将其化简，再求值，

由题意，$f(x)=\dfrac{\sin(2\pi-x)\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}{\cos(3\pi-x)\sin(\frac{11\pi}{2}-x)}=\dfrac{-\sin x\sin x}{-\cos x(-\cos x)}=-\tan^2 x$，

而 $\tan(-\dfrac{21\pi}{4})=\tan(-5\pi-\dfrac{\pi}{4})=\tan(-\dfrac{\pi}{4})=-\tan\dfrac{\pi}{4}=-1$，所以 $f(-\dfrac{21\pi}{4})=-\tan^2(-\dfrac{21\pi}{4})=-(-1)^2=-1$.

答案： -1

【变式 3】$\cos 1^{\circ}+\cos 2^{\circ}+\cos 3^{\circ}+\cdots+\cos 180^{\circ}=$______.

答案： -1

解析： 所给的表达式中，像 $\cos 1^{\circ}$，$\cos 2^{\circ}$ 这些项都无法单独求出，只能考虑与其它项结合计算，注意到 $\cos 1^{\circ}+\cos 179^{\circ}=\cos 1^{\circ}+\cos(180^{\circ}-1^{\circ})=\cos 1^{\circ}-\cos 1^{\circ}=0$，同理，$\cos 2^{\circ}+\cos 178^{\circ}=0$，$\cos 3^{\circ}+\cos 177^{\circ}=0$ 等等，所以采取两两组合的方法计算，为了更清晰地呈现计算过程，我们用倒序相加法，

记 $S=\cos 1^{\circ}+\cos 2^{\circ}+\cos 3^{\circ}+\cdots+\cos 179^{\circ}$，则 $S=\cos 179^{\circ}+\cos 178^{\circ}+\cos 177^{\circ}+\cdots+\cos 1^{\circ}$，

两式相加可得 $2S=(\cos 1^{\circ}+\cos 179^{\circ})+(\cos 2^{\circ}+\cos 178^{\circ})+(\cos 3^{\circ}+\cos 177^{\circ})+\cdots+(\cos 179^{\circ}+\cos 1^{\circ})=0$，

所以 $S=0$，故 $\cos 1^{\circ}+\cos 2^{\circ}+\cos 3^{\circ}+\cdots+\cos 180^{\circ}=S+\cos 180^{\circ}=\cos 180^{\circ}=-1$.

类型 II：用诱导公式解决给值求值问题

【例 2】已知 $\cos(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$，则 $\tan\alpha=$（　　）

（A）$\dfrac{4}{3}$　　（B）$\dfrac{3}{4}$　　（C）$-\dfrac{3}{4}$　　（D）$\pm\dfrac{3}{4}$

解析： 看到 $\dfrac{\pi}{2}+\alpha$，先用诱导公式把 $\dfrac{\pi}{2}$ 化掉，$\cos(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，

又 $\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$，所以 $\cos\alpha<0$，从而 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{4}{5}$，故 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{3}{4}$.

答案： B

【例 3】已知 $\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)=\frac{1}{3}$，且 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，则 $\sin(\frac{2\pi}{3}+\alpha)=$______.

解析： 给值求值问题，应先寻找已知角和求值角的联系，可将已知的角换元成 t，方便观察联系，

设 $t=\frac{\pi}{6}+\alpha$，则 $\alpha=t-\frac{\pi}{6}$，且 $\sin t=\frac{1}{3}$，所以 $\sin(\frac{2\pi}{3}+\alpha)=\sin(\frac{2\pi}{3}+t-\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{\pi}{2}+t)=\cos t$，

已知 $\sin t$ 求 $\cos t$，得研究 t 的范围，才能确定开平方该取正还是取负，

因为 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以 $t\in(\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6})$，从而 $\cos t<0$，故 $\cos t=-\sqrt{1-\sin^2 t}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，即 $\sin(\frac{2\pi}{3}+\alpha)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

答案： $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【总结】 给值求值问题，不要盲目地将已知条件展开，而是先尝试寻找条件和结论的角的联系.

强化训练

1．（2023•江苏无锡模拟•★）$\tan(-420^\circ)$ 的值为（　　）

（A）$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（C）$-\sqrt{3}$　　（D）$\sqrt{3}$

2．（2023•陕西一模•★）已知 $\sin^2(\pi-\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)$，且 $0<|\theta|<\frac{\pi}{2}$，则 θ 等于（　　）

（A）$-\frac{\pi}{6}$　　（B）$-\frac{\pi}{3}$　　（C）$\frac{\pi}{6}$　　（D）$\frac{\pi}{3}$

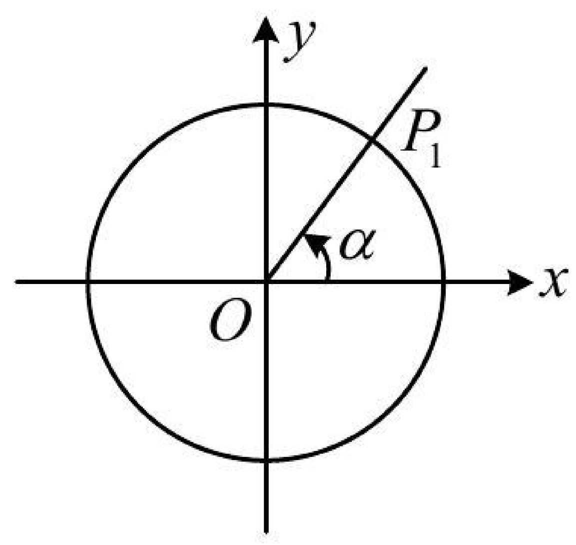
3．（2022•四川成都模拟•★★）已知 $\tan\theta=2$，则 $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)-\sin(\pi-\theta)}=$______.

4.（2023·湖北十堰模拟·★★）已知角α的终边与单位圆的交点为$P(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，则$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=$（　　）

（A）$\frac{4}{5}$　（B）$-\frac{4}{5}$　（C）$-\frac{3}{5}$　（D）$\frac{3}{5}$

5.（2023·安徽马鞍山模拟·★★★）如图，在平面直角坐标系内，角α的始边与x轴的非负半轴重合，终边与单位圆交于点$P_1(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，若线段$OP_{n-1}$绕点$O$逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$得到$OP_n(n\ge 2,n\in\mathbf{N}^*)$，则点$P_{2023}$的纵坐标为（　　）

（A）$-\frac{4}{5}$　（B）$-\frac{3}{5}$　（C）$\frac{3}{5}$　（D）$\frac{4}{5}$



6.（2022·四川自贡期末·★★）已知$\sin(\frac{\pi}{5}-x)=\frac{3}{5}$，则$\cos(\frac{7\pi}{10}-x)=$______.

7.（2022·湖南模拟·★★）已知$\cos(\frac{5\pi}{12}+\alpha)=\frac{1}{3}$，且$-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，则$\cos(\frac{\pi}{12}-\alpha)=$（　　）

（A）$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　（B）$\frac{1}{3}$　（C）$-\frac{1}{3}$　（D）$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

8.（2022·山西二模·★★★）若$\sin 10^\circ=a\sin 100^\circ$，则$\sin 20^\circ=$（　　）

（A）$\frac{a}{a^2+1}$　（B）$-\frac{a}{a^2+1}$　（C）$\frac{2a}{a^2+1}$　（D）$-\frac{2a}{a^2+1}$

9．（★★★）计算：

（1）$\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ =$______；（2）$\dfrac{\lg(\tan 1^\circ) + \lg(\tan 2^\circ) + \cdots + \lg(\tan 89^\circ)}{\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ} =$______.